



GRADO EN MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

PROYECTO FINAL DE GRADO

---

# El Problema de Dos Cuerpos

---

*Autor:*

David LÓPEZ ECHEVARRÍA

*Tutor académico:*

José Antonio LÓPEZ ORTÍ

Fecha de lectura: 10 de junio de 2021  
Curso académico 2020/2021



## Resumen

En este documento se incluye un Trabajo Final de Grado de la asignatura *MT1030 - Prácticas Externas y Proyecto Final de Grado* del Grado en Matemática Computacional de la Universitat Jaume I.

En él se desarrolla un trabajo bibliográfico acerca del problema de dos cuerpos, un problema básico de la mecánica celeste, así como el cálculo de efemérides y una introducción a la teoría de la perturbación. Como conclusión, se desarrolla una línea de trabajo en la que poder trabajar en un futuro.

## Palabras clave

Mecánica celeste. Problema de dos cuerpos. Movimiento elíptico. Teoría de la perturbación. Astrodinámica.

## Keywords

Celestial mechanics. Two-body problem. Elliptical motion. Theory of Perturbation. Astrodynamics.



# Índice general

<b>1. El Problema de los dos Cuerpos</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción . . . . .	7
1.2. Ecuación del movimiento relativo . . . . .	8
1.3. Integral de las áreas . . . . .	9
1.4. Ecuación de la órbita relativa . . . . .	10
1.5. Tercera ley de Kepler . . . . .	12
1.6. Constantes de la órbita . . . . .	13
1.7. Integral de la energía . . . . .	14
1.8. Movimiento elíptico . . . . .	16
1.8.1. Definiciones . . . . .	16
1.8.2. Relación entre la anomalía verdadera y la anomalía excéntrica . . . . .	18
1.8.3. La ecuación de Kepler: relación entre la anomalía media y la anomalía excéntrica . . . . .	19
1.8.4. Resolución de la ecuación de Kepler . . . . .	20
1.9. Movimiento parabólico . . . . .	20
1.9.1. Resolución de la ecuación de Barker . . . . .	23

1.10. Movimiento hiperbólico . . . . .	24
1.10.1. Relación entre F y la anomalía verdadera . . . . .	25
1.10.2. Relación entre F y el tiempo . . . . .	26
1.10.3. Movimiento repulsivo . . . . .	27
1.11. La órbita en el espacio . . . . .	28
1.11.1. Matrices de rotación y ángulos de Euler . . . . .	28
1.11.2. Constantes que determinan una órbita . . . . .	30
1.11.3. Elementos orbitales . . . . .	31
1.11.4. Cálculo de efemérides . . . . .	33
1.12. Determinación de los elementos a partir de $\vec{r}$ y $\vec{v}$ . . . . .	35
1.13. Teoría de perturbación . . . . .	38
1.13.1. Introducción . . . . .	38
1.13.2. Ecuación fundamental de la teoría de perturbación . . . . .	42
1.13.3. Ecuaciones planetarias de Gauss . . . . .	45
1.13.4. Ecuaciones planetarias de Lagrange . . . . .	47
1.13.5. Ecuaciones planetarias en el caso hiperbólico . . . . .	49
<b>2. Conclusiones y Perspectiva</b>	<b>51</b>

# Capítulo 1

## El Problema de los dos Cuerpos

### 1.1. Introducción

Desde que cursé la asignatura «MT1026 - Ecuaciones Diferenciales» y vi la rama de investigación de José Antonio, profesor de la asignatura y tutor académico de este TFG, supe que quería hacer un TFG relacionado con la mecánica celeste. Cuando era pequeño me sentía fascinado cuando me acostaba en el suelo de un monte a observar las estrellas y planetas y me preguntaba acerca de todo el estudio que tenían detrás.

En este Trabajo de Final de Grado se tratará el problema de los dos cuerpos, un caso del famoso problema de los  $n$  cuerpos, para luego entrar en materia y ver cómo se calculan efemérides y entrar en conceptos de teoría de perturbación junto a las ecuaciones planetarias de Gauss y de Lagrange.

El problema de dos cuerpos es un problema clásico en mecánica celeste y ha sido tratado por muchos autores, entre ellos [1], [2], [3], [4], [5], [7], etc. Este problema es uno de los pocos problemas integrables del cual es posible conocer su solución exacta. Este hecho permite por una parte probar la eficiencia de métodos numéricos de integración dado que podemos comparar las soluciones proporcionadas por estos con la solución exacta del problema de dos cuerpos. El nivel de dificultad de estas integraciones puede incrementarse sin más que tomar excentricidades altas. Por otra parte, en el sistema solar el movimiento de un planeta puede considerarse como un problema de dos cuerpos Sol-planeta considerado perturbado por el resto de planetas, lo que se considerará en la última parte de este trabajo. Finalmente, se considerará la extensión de las ecuaciones del movimiento perturbado al caso hiperbólico [6].

## 1.2. Ecuación del movimiento relativo

Sean dos puntos materiales de masa  $m_1$  y  $m_2$  cuya posición en un sistema de coordenadas inercial viene dada por los radio vectores  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ . Si se establece que  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , la fuerza con la que  $m_2$  atrae a  $m_1$  viene determinada por

$$\vec{F}_1 = +G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad (1.1)$$

y la fuerza con la que  $m_2$  es atraído por  $m_1$  es

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}. \quad (1.2)$$

Sin perder la generalidad, se supondrá que  $m_1 > m_2$ , y entonces se llamará primario a  $m_1$  y secundario a  $m_2$ .

Por la segunda ley de Newton, o ley fundamental de la dinámica, tenemos que

$$\vec{F}_1 = m_1 \ddot{\vec{r}}_1, \quad (1.3)$$

$$\vec{F}_2 = m_2 \ddot{\vec{r}}_2. \quad (1.4)$$

Igualando las expresiones (1.1) y (1.3) se obtiene que

$$\ddot{\vec{r}}_1 = +G \frac{m_2}{r^3} \vec{r}, \quad (1.5)$$

y haciendo lo mismo con las expresiones (1.2) y (1.4), para la fuerza  $\vec{F}_2$  se obtiene

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_1}{r^3} \vec{r}, \quad (1.6)$$

Con esto y sabiendo que  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , que derivando se transforma en  $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1$ , se sustituyen los resultados obtenidos en (1.5) y (1.6) y se llega a

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1}{r^3} \vec{r} - G \frac{m_2}{r^3} \vec{r}.$$

Factorizando la expresión anterior y denotando  $G(m_1 + m_2) = \mu$  una constante, se obtiene la llamada ecuación del movimiento relativo.

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}. \quad (1.7)$$



### 1.3. Integral de las áreas

Si se denota  $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , se puede reescribir la ecuación (1.7) como

$$\dot{\vec{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}. \quad (1.8)$$

Por otro lado, se calcula la derivada de  $\vec{r} \wedge \vec{v}$  teniendo en cuenta (1.8) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) &= \\ &= \frac{d}{dt}(\vec{r}) \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{v})}_{\dot{\vec{v}}} \\ &= \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{v}}_{\vec{0}} + \vec{r} \wedge \left( -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \right) \\ &= -\frac{\mu}{r^3} \left( \underbrace{\vec{r} \wedge \vec{r}}_{\vec{0}} \right) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \vec{0}.$$

Si se integra esta última expresión, se tiene que

$$\vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{C}, \quad (1.9)$$

que se conoce como la integral de las áreas.  $\vec{C}$  es una constante vectorial que se llama constante de las áreas y equivale a tres constantes escalares.

Para analizar el significado de  $\vec{C}$ , es necesario recordar que el área de un triángulo como el de la figura (1.1) cuyos lados vienen representados por  $\vec{r}$ ,  $\vec{r} + d\vec{r}$  y  $d\vec{r}$ , puede expresarse de forma genérica de la forma

$$d\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \wedge d\vec{r}).$$

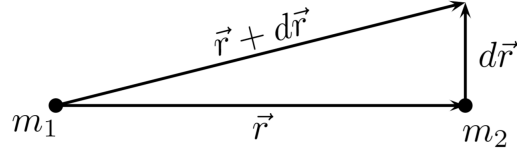


Figura 1.1: Diagrama de áreas

Se define velocidad areolar como la derivada con respecto al tiempo del área barrida por el radio vector por unidad de tiempo

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left( \vec{r} \wedge \vec{v} \right) = \frac{1}{2} \vec{C}, \quad (1.10)$$

que indica que la constante de las áreas es el doble de la velocidad areolar,  $\vec{C} = 2\dot{\vec{A}}$ .

Si se integra la relación (1.10), se tiene que

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{C} t + \vec{K},$$

para así enunciar la ley de las áreas o segunda ley de Kepler: las áreas barridas por el radio vector en tiempos iguales son iguales.

Para demostrar que la órbita del secundario en torno al primario es plana, se multiplica por  $\vec{r}$  ambos miembros de la expresión (1.9)

$$\vec{r} \cdot \left( \vec{r} \wedge \vec{v} \right) = \vec{r} \cdot \vec{C} = 0.$$

#### 1.4. Ecuación de la órbita relativa

Para calcular la ecuación de la órbita, se hallará la derivada de  $\vec{v} \wedge \vec{C}$ . Sabiendo que  $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$  y que su derivada es  $2r\dot{r} = 2\vec{r} \cdot \vec{v}$ , es decir,  $r\dot{r} = \vec{r} \cdot \vec{v}$ . Con este resultado y junto

a (1.7), se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\vec{v} \wedge \vec{C}) &= \dot{\vec{v}} \wedge \vec{C} \\
&= \left(-\frac{\mu}{r^3} \vec{r}\right) \wedge \vec{C} \\
&= \left(-\frac{\mu}{r^3} \vec{r}\right) \wedge (\vec{r} \wedge \vec{v}) \\
&= -\frac{\mu}{r^3} [\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{v})] \\
&= -\frac{\mu}{r^3} [(\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{v}] \\
&= -\frac{\mu}{r^3} [r \dot{\vec{r}} - r^2 \vec{v}] \\
&= \mu \left[ \frac{r \vec{v} - \dot{\vec{r}}}{r^2} \right] \\
&= \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)
\end{aligned}$$

Integrando la expresión anterior se obtiene

$$\vec{v} \wedge \vec{C} = \mu \left( \frac{\vec{r}}{r} + \vec{e} \right), \quad (1.11)$$

donde la constante vectorial de integración se denota por  $\mu \vec{e}$ .

Calculando ahora  $C^2$  y teniendo en cuenta la integral (1.11), se tiene que

$$C^2 = \vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{r} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{C} = \vec{r} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{C}) = \vec{r} \cdot \mu \left( \frac{\vec{r}}{r} + \vec{e} \right) = \mu(r + \vec{r} \cdot \vec{e})$$

y tomando

$$p = \frac{C^2}{\mu}$$

se tiene que

$$p = r + \vec{r} \cdot \vec{e}, \quad (1.12)$$

que es la ecuación de la órbita relativa del secundario girando en torno al primario.  $p$  y  $\vec{e}$  son constantes y  $p = \frac{C^2}{\mu}$  representa el parámetro de la cónica que sigue la órbita.

Considerando el producto escalar  $\vec{r} \cdot \vec{e} = r \cdot e \cdot \cos V$ , siendo  $r$  y  $e$  los módulos de  $\vec{r}$  y  $\vec{e}$ , y  $V$  el ángulo entre ellos, se verifica que

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V}, \quad (1.13)$$

que es la ecuación polar focal de una cónica, siendo  $(r, V)$  las coordenadas polares referidas al sistema cuyo origen coincide con el primario y los ángulos se miden a partir de la dirección  $\vec{e}$  en el sentido del movimiento.

En la expresión (1.13),  $p$  representa el parámetro de la cónica, y  $e$  la excentricidad, y según los valores de esta, se contemplan los tipos de cónicas de la Tabla (1.1).

excentricidad	tipo de cónica
$e = 0$	circunferencia
$0 < e < 1$	elipse
$e = 1$	parábola
$e > 1$	hipérbola

Tabla 1.1: Tipos de cónica según la excentricidad

**Definición 1** *Se denomina periastro al punto de la órbita más próximo al primario.*

**Definición 2** *Se denomina apoastro al punto de la órbita más alejado del primario.*

**Definición 3** *Se denomina anomalía verdadera al ángulo  $V$  que forma el radio vector  $\vec{r}$  con la dirección del periastro.*

De la expresión (1.13) se deduce que  $r$  es mínimo cuando  $V = 0$ . En ese caso,  $\vec{e}$  es un vector con origen en el primario y la dirección del radio vector de longitud mínima.

Se puede enunciar la primera ley de Kepler generalizada como «en su movimiento relativo, el secundario describe una cónica en la que el primario se encuentra en uno de sus focos».

## 1.5. Tercera ley de Kepler

En el estudio del movimiento elíptico, se verifica que  $p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}$ . Consideramos  $P$  el periodo de la órbita y  $n = \frac{2\pi}{P}$  el movimiento medio, entonces la velocidad areolar  $\dot{A}$  viene dada

por

$$\dot{A} = \frac{\pi ab}{P}, \quad (1.14)$$

y de esta expresión se obtiene que

$$C = 2\dot{A} = \frac{2\pi ab}{P} = nab, \quad (1.15)$$

pero también se tiene que

$$\mu = \frac{C^2}{p} = \frac{n^2 a^2 b^2}{\frac{b^2}{a}} = n^2 a^3 = 4\pi^2 \frac{a^3}{P^2}. \quad (1.16)$$

De esta expresión se puede deducir la tercera ley de Kepler que dice que «los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores».

## 1.6. Constantes de la órbita

En una órbita se tienen las constantes  $\vec{C}$  y  $\vec{e}$ , cada una de las cuales equivale a tres constantes escalares. Como por otra parte  $\vec{C} \cdot \vec{e} = 0$ , solo hay cinco constantes independientes entre estos vectores.

$\vec{C}$  determina el plano orbital.

$\vec{e}$  determina el tamaño, forma y orientación de la órbita relativa.

Para determinar la posición del cuerpo en la órbita, es preciso conocer una nueva constante  $T$ , como puede ser el instante de paso por el periastro (u otros instantes).

En función de estas constantes, y contando las áreas a partir del periastro, se tiene que para  $t = T$ ,

$$\vec{O} = \frac{1}{2}\vec{C}T + \vec{k} \implies \vec{k} = -\frac{1}{2}\vec{C}T$$

Por tanto, se puede escribir

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{C}(t - T),$$

que es la relación que fija la posición del secundario en la órbita.

Para calcular la velocidad en función del radio vector, se multiplica por  $\vec{C}$  ambos lados de la expresión (1.11).

$$\begin{aligned}\mu \vec{C} \wedge \left( \frac{\vec{r}}{r} + \vec{e} \right) &= \vec{C} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{C}) \\ &= (\vec{C} \cdot \vec{C}) \vec{v} - \vec{C} \cdot \vec{v} \cdot \vec{C} \\ &= C^2 \vec{v}.\end{aligned}$$

Que si se despeja la velocidad, se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\mu}{C^2} \vec{C} \wedge \left( \frac{\vec{r}}{r} + \vec{e} \right) \\ &= \frac{1}{p} \vec{C} \wedge \left( \frac{\vec{r}}{r} + \vec{e} \right).\end{aligned}\tag{1.17}$$

## 1.7. Integral de la energía

A partir de la ecuación del movimiento relativo (1.7), multiplicando por  $\vec{v}$  se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} &= -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{v}) \\ &= -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \\ &= -\frac{\mu}{r^3} r \dot{r} \\ &= -\frac{\mu \dot{r}}{r^2} \\ &= \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right).\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v \cdot v) \\ &= \frac{1}{2} (v \dot{v} + \dot{v} v) \\ &= \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}.\end{aligned}$$

Igualando las expresiones anteriores se tiene que  $\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right)$ , e integrando se llega a que

$$h = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r}.\tag{1.18}$$

Esta ecuación recibe el nombre de integral de energía, siendo  $h$  la constante de energía. Podemos expresar  $h$  en función de  $C$  y  $e$ , para ello elevemos al cuadrado la expresión (1.17), recordando que  $p = \frac{C^2}{\mu}$  y que  $p = r + \vec{r} \cdot \vec{e}$

$$\begin{aligned}
v^2 &= \frac{C^2}{\mu^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} + \vec{e} \right)^2 \\
&= \frac{C^2}{\mu^2} \left( 1 + e^2 + \frac{2}{r} \vec{r} \cdot \vec{e} \right) \\
&= \frac{\mu}{p} \left( 1 + e^2 + \frac{2}{r} (p - r) \right) \\
&= \mu \left( \frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación (1.18), se tiene que

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{2} \mu \frac{e^2 - 1}{p} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{C^2} (e^2 - 1),
\end{aligned}$$

y esta ecuación nos permite clasificar la órbita en función de la constante  $h$  como se ve en la Tabla (1.2).

valor de $h$	excentricidad	tipo de cónica
$h < 0$	$e < 1$	elipse
$h = 0$	$e = 1$	parábola
$h > 0$	$e > 1$	hipérbola

Tabla 1.2: Tipos de cónica según su energía

En el caso elíptico, se tiene que  $p = a(1 - e^2)$ , que si se sustituye en la ecuación (1.19) se llega a

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

En el caso parabólico se obtiene  $v^2 = \frac{2\mu}{r}$  y en el caso hiperbólico,  $v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)$ .

## 1.8. Movimiento elíptico

### 1.8.1. Definiciones

Para comenzar esta sección, se presentará una serie de definiciones en relación a la figura (1.2).

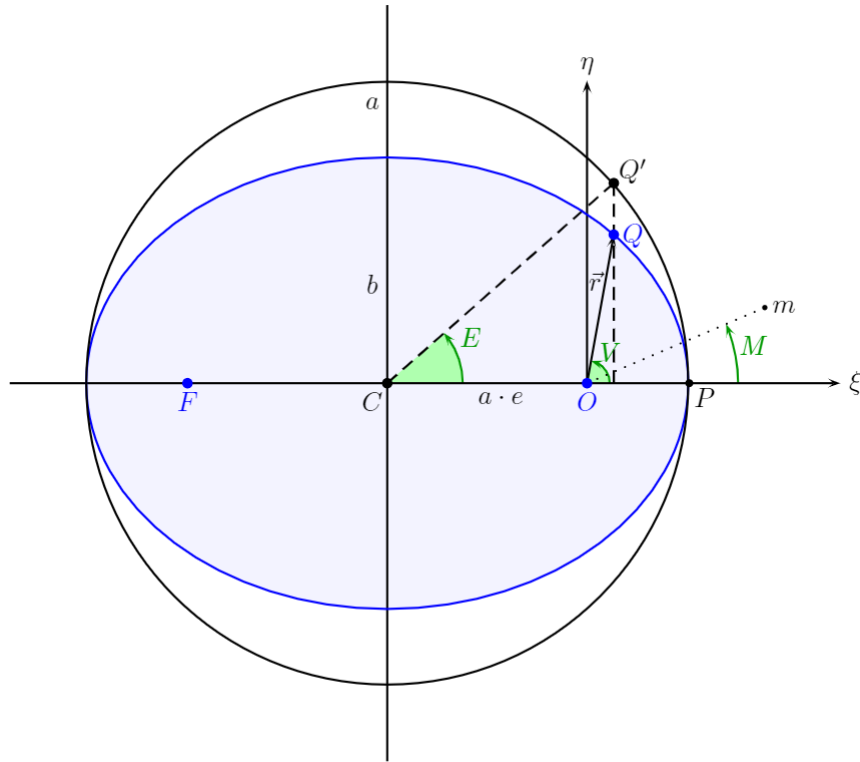


Figura 1.2: Movimiento Elíptico

**Definición 4** *Primario ( $O$ ). Cuerpo primario situado en uno de los focos de la elipse.*

**Definición 5** *Secundario ( $Q$ ). Cuerpo secundario situado sobre la elipse que se mueve en sentido antihorario.*

**Definición 6** *Centro ( $C$ ). Es el centro de la elipse que describe la órbita.*



**Definición 7** *Anomalía verdadera.* Es el ángulo  $V = \widehat{POQ}$  formado por el radio vector del astro  $\overrightarrow{OQ}$  y la dirección del periastro  $\overrightarrow{OP}$

**Definición 8** *Anomalía excéntrica.* Es el ángulo  $E = \widehat{PCQ'}$  formado por el radio  $\overrightarrow{CQ'}$  siendo  $Q'$  la intersección con el círculo principal del la elipse de la normal por  $Q$  al semieje mayor, y la del periastro  $\overrightarrow{CP}$ .

**Definición 9** *Anomalía media.* Es el ángulo  $M = \widehat{POm}$  descrito con vértice en el foco  $O$  en sentido antihorario y a partir de la dirección del periastro, por un astro ficticio ( $m$ ) que gira alrededor del primario con velocidad angular constante igual al movimiento medio por  $n = \frac{2\pi}{T}$ , siendo  $T$  el periodo orbital.

$$M = n(t - t_0)$$

donde  $t_0$  es la época de paso por el periastro.

Si se considera el sistema de ejes cartesiano  $[O; \{\xi, \eta\}]$  con origen en el primario ( $O$ ), las coordenadas del secundario ( $Q$ ) en dicho sistema son

$$\begin{cases} \xi = r \cos V \\ \eta = r \sin V. \end{cases}$$

Tomando  $Q_1$  como la proyección de  $Q$  sobre el eje  $\xi$ , se tiene que

$$\xi = r \cos V = \overline{CQ_1} - \overline{CO} = a \cos E - ae = a(\cos E - e). \quad (1.20)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$\frac{a \sin E}{\eta} = \frac{\overline{Q_1Q'}}{\overline{Q_1Q}} = \frac{a}{b},$$

se tiene que

$$\eta = r \sin V = b \sin E = a \sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

Con esto, se pueden expresar las coordenadas de  $Q$  en función de la anomalía excéntrica

$$\begin{cases} \xi = a(\cos E - e) \\ \eta = a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \end{cases} \quad (1.21)$$

Aprovechando la relación (1.21) se obtiene que

$$\begin{aligned}
r^2 &= \xi^2 + \eta^2 \\
&= \left[ a(\cos E - e) \right]^2 + \left[ a\sqrt{1 - e^2} \sin E \right]^2 \\
&= a^2 \left[ \cos^2 E + e^2 - 2e \cos E + \sin^2 E - e^2 \sin^2 E \right] \\
&= a^2 \left[ 1 + e^2 - 2e \cos E - e^2(1 - \cos^2 E) \right] \\
&= a^2 \left[ 1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E \right] \\
&= a^2 (1 - e \cos E)^2,
\end{aligned}$$

de donde se puede deducir la ecuación que determina el valor del radio vector a partir de la anomalía excéntrica

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (1.22)$$

### 1.8.2. Relación entre la anomalía verdadera y la anomalía excéntrica

Partiendo de las ecuaciones (1.20) y (1.22) y restando y sumando ambas expresiones, se obtiene

$$\begin{cases} r - r \cos V = a(1 - e \cos E - \cos E + e) = a(1 + e)(1 - \cos E) \\ r + r \cos V = a(1 - e \cos E + \cos E - e) = a(1 - e)(a + \cos E), \end{cases}$$

que aplicando las fórmulas del ángulo medio se pueden transformar en

$$\begin{cases} r \sin^2 \frac{V}{2} = a(1 + e) \sin^2 \frac{E}{2} \\ r \cos^2 \frac{V}{2} = a(1 - e) \cos^2 \frac{E}{2} \end{cases} \quad (1.23)$$

y dividiendo ambas expresiones se puede llegar a

$$\tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{E}{2}, \quad (1.24)$$

siendo esta la ecuación que proporciona el valor de la anomalía verdadera  $V$  una vez se conoce el valor de la anomalía excéntrica  $E$ .

### 1.8.3. La ecuación de Kepler: relación entre la anomalía media y la anomalía excéntrica

La integral de las áreas (1.9) se puede expresar en coordenadas polares como  $r^2 \frac{dV}{dt} = C$ . Por otro lado, se tiene la expresión (1.15), e igualando se llega a la expresión

$$r^2 \frac{dV}{dt} = nab \implies \frac{1}{ab} r^2 dV = n dt.$$

Integrando y sabiendo que la anomalía media es  $M = n(t - t_0)$  se tiene que

$$M = \frac{1}{ab} \int_0^V r^2 dV. \quad (1.25)$$

Por otro lado, diferenciando la ecuación (1.24) se tiene que

$$\frac{1}{2 \cos^2 \frac{V}{2}} dV = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{E}{2}} dE,$$

y teniendo en cuenta la relación (1.23), se puede escribir

$$dV = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{a(1-e) \cos^2 \frac{E}{2}}{r \cos^2 \frac{E}{2}} dE = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r} dE = \frac{b}{r} dE.$$

Si se sustituye esta última igualdad en la expresión (1.25), se tiene que

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{ab} \int_0^V r^2 dV \\ &= \frac{1}{ab} \int_0^E r^2 \frac{b}{r} dE \\ &= \frac{1}{a} \int_0^E r dE \\ &= \frac{1}{a} \int_0^E a(1 - e \cos E) dE \\ &= \int_0^E 1 - e \cos E dE \\ &= E - e \sin E, \end{aligned} \quad (1.26)$$

que es la llamada ecuación de Kepler y nos relaciona la anomalía media y la anomalía excéntrica.

#### 1.8.4. Resolución de la ecuación de Kepler

**Teorema 1** Sea la ecuación  $M = E - e \sin E$ . Entonces, si  $|e| < 1$ , existe solución y es única.

*Demostración.* Para verificar el teorema anterior, dados unos valores de  $M$  y  $e$ , basta con tomar  $E$  como una función  $E = \varphi(E)$ , de forma que  $\varphi(E) = M + e \sin E$ . Se tiene que  $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  es continua y derivable con

$$\frac{d}{dE}\varphi(E) = e \cos E$$

y, por tanto

$$\left| \frac{d}{dE}\varphi(E) \right| = |e \cos E| < e < 1.$$

Esto hace que la función  $\varphi$  sea contractiva, lo cual hace que exista un único punto fijo  $E$  tal que  $E = M + e \sin E$ . ■

La resolución de la ecuación de Kepler se realiza por métodos numéricos o mediante desarrollo en series. Un ejemplo de estos desarrollos en serie hasta orden 5 en  $E$  sería

$$\begin{aligned} E &= M + \left( e - \frac{e^3}{8} + \frac{e^5}{192} \right) \sin M + \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{6} \right) \sin 2M \\ &+ \left( \frac{3}{8}e^3 - \frac{27}{128}e^5 \right) \sin 3M + \frac{e^4}{3} \sin 4M + \frac{125}{384}e^5 \sin 5M + O(e^6). \end{aligned}$$

En cuanto a métodos numéricos, se puede utilizar la iteración de Newton-Raphson

$$\begin{cases} E_0 = M \\ E_{n+1} = E_n + \frac{M - E_n + e \sin E_n}{1 - e \cos E_n}, \end{cases}$$

donde si  $E$  es la solución,  $|E - E_{n+1}| \leq |E_{n+1} - E_n|$ .

### 1.9. Movimiento parabólico

La ecuación de la órbita relativa del secundario respecto al primario viene dada por la ecuación (1.13), que haciendo  $e = 1$  en ella se obtiene la relación

$$r = \frac{p}{1 + \cos V}.$$

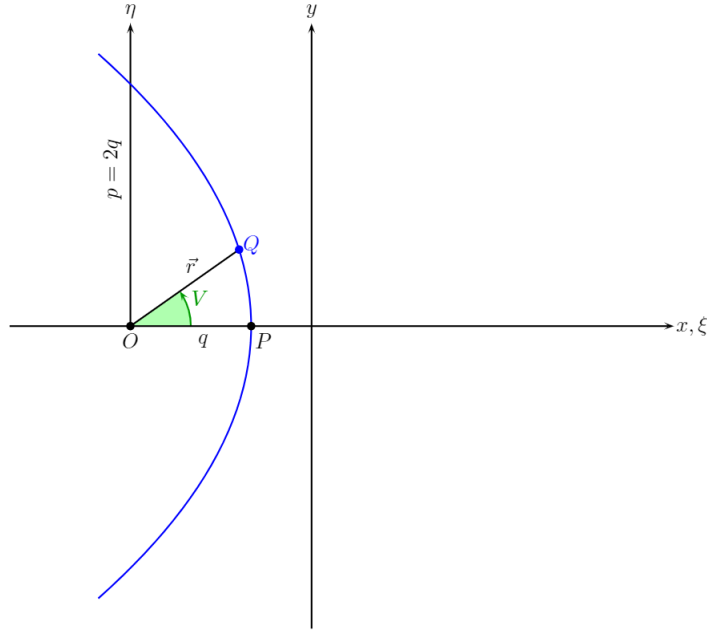


Figura 1.3: Movimiento Parabólico

En el movimiento parabólico, se tiene que  $p = 2q$ , donde  $q$  es la distancia del primario al periastro,  $q = \overline{OP}$ . Con esto y con cambios trigonométricos, se puede transformar la igualdad anterior en

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{V}{2}}.$$

Con esto, se obtienen las ecuaciones del cambio de coordenadas

$$\begin{cases} \xi = r \cos V = q(1 - \tan^2 \frac{V}{2}) \\ \eta = r \sin V = 2q \tan \frac{V}{2}. \end{cases}$$

Haciendo el cambio trigonométrico  $s = \tan \frac{V}{2}$ , se obtiene el conjunto de igualdades

$$\begin{cases} \xi = q(1 - s^2) \\ \eta = 2qs \\ r = q(1 + s^2) \\ V = 2 \arctan s, \end{cases}$$

que para resolver el problema hay que relacionar la variable  $s$  con el tiempo.

Para determinar  $s$ , se expresa la ley de las áreas en forma polar.

$$r^2 \frac{dV}{dt} = C = \sqrt{p\mu} = \sqrt{2q\mu}$$

Usando las igualdades anteriores y sabiendo que  $dV = \frac{2}{1+s^2} ds$ , se puede llegar a

$$dt = \frac{r^2}{\sqrt{2q\mu}} dV = \frac{q^2(1+s^2)^2}{\sqrt{2q\mu}} \frac{2}{1+s^2} ds = \sqrt{\frac{2q^3}{\mu}} (1+s^2) ds$$

Integrando la expresión anterior entre  $T_0$  y  $t$  se obtiene

$$t - T_0 = \sqrt{\frac{2q^3}{\mu}} \int_0^s (1+s^2) ds = \sqrt{\frac{2q^3}{\mu}} \left(s + \frac{s^3}{3}\right),$$

o lo que es lo mismo,

$$\tan \frac{V}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} (t - T_0), \quad (1.27)$$

siendo esta la ecuación de Barker, que conecta la anomalía verdadera  $V$  con el tiempo  $t$  del movimiento parabólico.

**Teorema 2** Sea la ecuación  $\tan \frac{V}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} (t - T_0)$ . Entonces si  $V \in ]-\pi, \pi[$ , existe solución y es única.

*Demostración.* Se define la función  $\Psi(V) = \tan \frac{V}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} (t - T_0)$  que es monótona creciente si  $V \in ]-\pi, \pi[$  para cualquier valor de  $t$ .

$$\lim_{V \rightarrow -\pi} \Psi(V) = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{V \rightarrow \pi} \Psi(V) = \infty,$$

y puesto que  $\Psi$  es continua en el intervalo  $]-\pi, \pi[$ , se tiene que para cualquier valor de  $t$ , existe un único valor de  $V \in ]-\pi, \pi[$  que es solución. ■

### 1.9.1. Resolución de la ecuación de Barker

Para resolver la ecuación de Barker (1.27) se realiza el cambio de variable  $\tan \frac{V}{2} = 2 \cot 2\gamma$ . Primero que todo, apliquemos transformaciones trigonométricas a  $\cot 2\gamma$ .

$$\cot 2\gamma = \frac{1}{\tan 2\gamma} = \frac{1}{\frac{2 \tan \gamma}{1 - \tan^2 \gamma}} = \frac{1 - \tan^2 \gamma}{2 \tan \gamma} = \frac{1}{2}(\cot \gamma - \tan \gamma).$$

Por tanto,  $\tan \frac{V}{2} = \cot \gamma - \tan \gamma$ . Calculando ahora  $\tan^3 \frac{V}{2}$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} \tan^3 \frac{V}{2} &= \\ &= \cot^3 \gamma - 3 \cot^2 \gamma \tan \gamma + 3 \cot \gamma \tan^2 \gamma - \tan^3 \gamma \\ &= \cot^3 \gamma - 3 \cot \gamma + 3 \tan \gamma - \tan^3 \gamma \\ &= \cot^3 \gamma - 3(\cot \gamma - \tan \gamma) - \tan^3 \gamma \\ &= \cot^3 \gamma - 3 \tan \frac{V}{2} - \tan^3 \gamma. \end{aligned}$$

Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación de Barker (1.27) se llega a que

$$\tan \frac{V}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{V}{2} = \frac{1}{3}(\cot^3 \gamma - \tan^3 \gamma) = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t - T_0),$$

Finalmente, haciendo el cambio  $\tan \gamma = \sqrt[3]{\tan \frac{\beta}{2}}$  se obtiene

$$\frac{1}{3}(\cot \frac{\beta}{2} - \tan \frac{\beta}{2}) = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t - T_0),$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{2}{3} \cot \beta = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t - T_0).$$

De donde se puede deducir que

$$\beta = \arctan \left( \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q^3}{\mu}} \frac{1}{t - T_0} \right).$$

Calculando  $\beta \implies \gamma \implies V$ ; a partir del valor de  $V$  se puede calcular finalmente el valor de  $r$ , con lo que el problema está resuelto.

## 1.10. Movimiento hiperbólico

La parametrización de una hipérbola en un sistema de coordenadas  $[C; \{X, Y\}]$  puede venir dada por

$$\begin{cases} X = -a \cosh F \\ Y = b \sinh F \end{cases} \longrightarrow \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

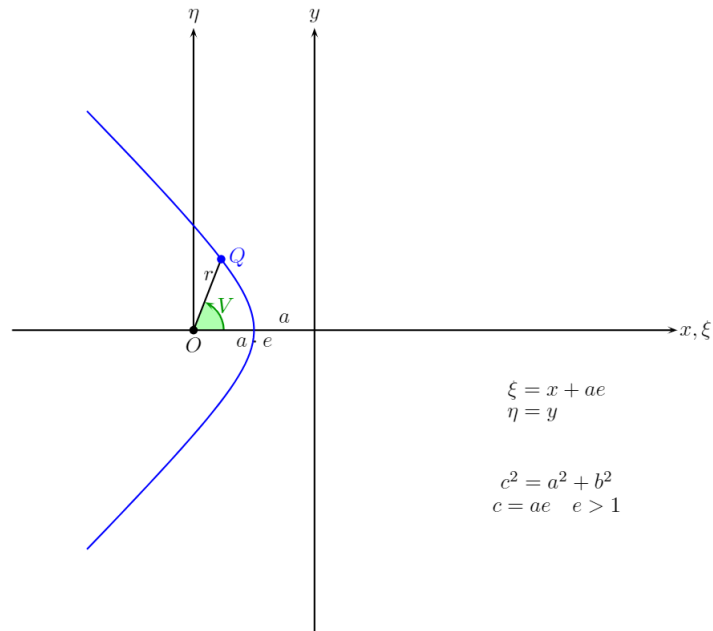


Figura 1.4: Movimiento hiperbólico

Por otra parte, en el sistema cartesiano  $[O; \{\xi, \eta\}]$  se puede expresar como

$$\begin{cases} \xi = r \cos V \\ \eta = r \sin V, \end{cases}$$

de donde por un lado se tiene que

$$\xi = ae - a \cosh F = a(e - \cosh F) = r \cos V \quad (1.28)$$

y por otro la relación

$$\eta = b \sinh F = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh F = r \sin V$$



Aprovechando la relación anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
r^2 &= \xi^2 + \eta^2 \\
&= a^2(e - \cosh F)^2 + (a\sqrt{e^2 - 1} \sinh F)^2 \\
&= a^2e^2 + a^2 \cosh^2 F - 2a^2e \cosh F + a^2e^2 \sinh^2 F - a^2 \sinh^2 F \\
&= a^2e^2(1 + \sinh^2 F) - 2a^2e \cosh F + a^2(\cosh^2 F - \sinh^2 F) \\
&= a^2e^2 \cosh^2 F - 2a^2e \cosh F + a^2 \\
&= a^2(e^2 \cosh^2 F - 2e \cosh F + 1) \\
&= a^2(1 - e \cosh F)^2.
\end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$r = a(e \cosh F - 1). \quad (1.29)$$

La variable  $F$  juega el papel de la anomalía excéntrica  $E$ , es una variable auxiliar que habrá que relacionarla con la anomalía verdadera  $V$  y con el tiempo.

### 1.10.1. Relación entre $F$ y la anomalía verdadera

En trigonometría hiperbólicas se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\cosh F + 1 &= \frac{e^F + e^{-F} + 2}{2} = \frac{(e^{\frac{F}{2}} + e^{-\frac{F}{2}})^2}{2} = 2 \left( \frac{e^{\frac{F}{2}} + e^{-\frac{F}{2}}}{2} \right)^2 = 2 \cosh^2 \frac{F}{2} \\
\cosh F - 1 &= \frac{e^F + e^{-F} - 2}{2} = \frac{(e^{\frac{F}{2}} - e^{-\frac{F}{2}})^2}{2} = 2 \left( \frac{e^{\frac{F}{2}} - e^{-\frac{F}{2}}}{2} \right)^2 = 2 \sinh^2 \frac{F}{2}
\end{aligned}$$

De estas dos relaciones se tiene que

$$\tanh \frac{F}{2} = \sqrt{\frac{\cosh F - 1}{\cosh F + 1}}. \quad (1.30)$$

Sumando y restando las relaciones (1.28) y (1.29) se obtiene

$$\begin{aligned}
r(1 + \cos V) &= a(e - \cosh F + e \cosh F - 1) = a(e - 1)(\cosh F + 1) \\
r(1 - \cos V) &= a(-e + \cosh F + e \cosh F - 1) = a(e + 1)(\cosh F - 1)
\end{aligned}$$

Aplicando propiedades trigonométricas y propiedades de la trigonometría hiperbólica, se puede obtener

$$\begin{aligned} 2r \cos^2 \frac{V}{2} &= 2a(e-1) \cosh^2 \frac{F}{2} \\ 2r \sin^2 \frac{V}{2} &= 2a(e+1) \sinh^2 \frac{F}{2} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Dividiendo la segunda expresión anterior entre la primera y calculando su raíz cuadrada se tiene que

$$\tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{F}{2} \quad (1.32)$$

Siendo esta la ecuación que relaciona la anomalía verdadera y la F.

### 1.10.2. Relación entre F y el tiempo

La integral de las áreas (1.9) se expresa para el movimiento hiperbólico como  $C = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(e^2 - 1)}$ . Se define también la cantidad de movimiento  $n$  de similar forma al movimiento elíptico como

$$\mu = n^2 a^3 \longrightarrow C = na^2 \sqrt{e^2 - 1}.$$

Por otro lado, se define  $M = n(t - T_0)$  y se tiene que  $C = 2\dot{A} = r^2 \frac{dV}{dt}$ , que integrando

$$\int_{T_0}^t na^2 \sqrt{e^2 - 1} dt = \int_0^V r^2 dV,$$

es decir,

$$M = \frac{1}{a^2 \sqrt{e^2 - 1}} \int_0^V r^2 dV.$$

Diferenciando ahora la ecuación (1.32) que relaciona la F y la anomalía verdadera, se obtiene

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\cos^2 \frac{V}{2}} \right) dV = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \left( \frac{1}{\cosh^2 \frac{F}{2}} \right) dF$$

y despejando el  $dV$ , con la ayuda de (1.31) y (1.29), se llega a que

$$dV = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \left( \frac{\cos^2 \frac{V}{2}}{\cosh^2 \frac{F}{2}} \right) dF = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \frac{a(e-1) \cosh^2 \frac{F}{2}}{r \cosh^2 \frac{F}{2}} dF = \frac{\sqrt{e^2-1}}{e \cosh F - 1} dF.$$

Por tanto, con (1.29) y el resultado anterior, se cumple que

$$M = \frac{1}{a^2 \sqrt{e^2-1}} \int_0^F a^2 (e \cosh F - 1)^2 \frac{\sqrt{e^2-1}}{e \cosh F - 1} dF = \int_0^F (e \cosh F - 1) dF$$

y se obtiene la ecuación equivalente a la de Kepler para el movimiento hiperbólico

$$M = e \sinh F - F. \quad (1.33)$$

### 1.10.3. Movimiento repulsivo

Como complemento, se puede estudiar el movimiento para una fuerza  $\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$  (como el caso Coulombiano) donde  $K > 0$  y  $q_1 \cdot q_2 > 0$ . En este caso, el movimiento se produce en la rama de la hipérbola que no «contiene» al primario. En este caso únicamente, por carecer de interés en mecánica celeste, lo trataremos de modo menos exhaustivo.

La parametrización de la hipérbola puede venir dada como

$$\begin{cases} X = a \cosh F \\ Y = b \sinh F, \end{cases}$$

que expresado en el sistema cartesiano  $[O; \{\xi, \eta\}]$  sería

$$\begin{cases} \xi = ae + a \cosh F = a(e + \cosh F) \\ \eta = b \sinh F = a \sqrt{e^2 - 1} \sinh F, \end{cases}$$

Tomando la relación anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} r^2 &= \xi^2 + \eta^2 \\ &= a^2(e + \cosh F)^2 + (a \sqrt{e^2 - 1} \sinh F)^2 \\ &= a^2 e^2 + a^2 \cosh^2 F + 2a^2 e \cosh F + a^2 e^2 \sinh^2 F - a^2 \sinh^2 F \\ &= a^2 e^2 (1 + \sinh^2 F) + 2a^2 e \cosh F + a^2 (\cosh^2 F - \sinh^2 F) \\ &= a^2 e^2 \cosh^2 F + 2a^2 e \cosh F + a^2 \\ &= a^2 (e^2 \cosh^2 F + 2e \cosh F + 1) \\ &= a^2 (1 + e \cosh F)^2. \end{aligned}$$

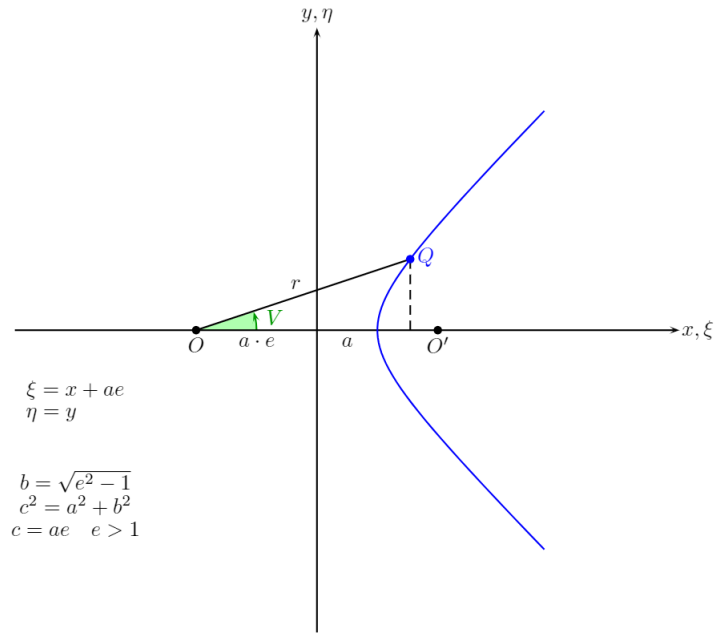


Figura 1.5: Movimiento repulsivo

Por tanto, en el movimiento repulsivo tenemos que

$$r = a(1 + e \cosh F)$$

## 1.11. La órbita en el espacio

### 1.11.1. Matrices de rotación y ángulos de Euler

Dado un sistema de referencias ortonormal  $OXYZ$ , llamaremos rotación de ángulo  $\alpha$  alrededor del eje  $OZ$  a la rotación que viene dada por la transformación

$$R_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, se puede definir como la rotación de ángulo  $\alpha$  en torno a  $OY$  a

$$R_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

y respecto al eje  $OX$  a

$$R_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Dados dos sistemas de referencia con origen en  $O$  y con la misma orientación, se tiene que el paso de un sistema al otro se puede efectuar con los ángulos de Euler:  $\psi, \theta, \varphi$

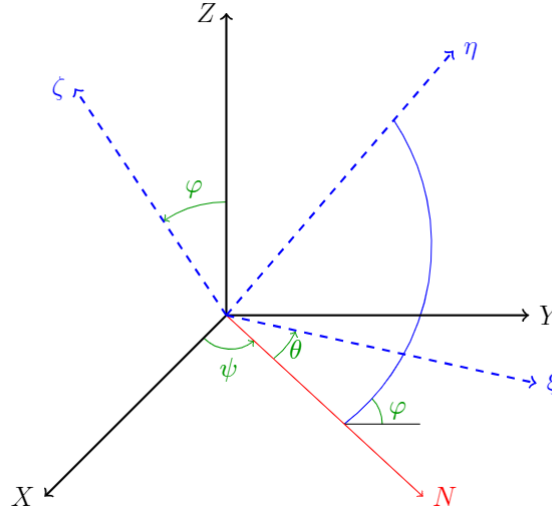


Figura 1.6: Representación ángulos de Euler

El paso de las coordenadas en el sistema  $XYZ$  al sistema  $\xi\eta\zeta$  se puede efectuar como

$$OXYZ \xrightarrow{R_3(\psi)} OX'Y'Z' \xrightarrow{R_1(\varphi)} OX''Y''Z'' \xrightarrow{R_3(\theta)} OX'''Y'''Z'''$$

Donde  $OX' = ON$  (línea de los nodos que intersectan el plano  $\Pi_{OXY}$  con  $\Pi_{O\xi\eta}$ );  $OZ' = OZ$ ;  $OY'$  formando un triedro directo,  $OX'' = OX'$ ;  $OZ'' = O\zeta$ ;  $OY''$  formando triedro directo,  $OX''' = O\xi$ ;  $OZ''' = O\zeta$ ;  $OY''' = O\eta$ .

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = R_3(\theta)R_1(\varphi)R_3(\psi) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix},$$

y análogamente

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_3(-\psi)R_1(-\varphi)R_3(-\theta) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}.$$

### 1.11.2. Constantes que determinan una órbita

Dado un sistema de referencia ortonormal con el origen en un punto  $O'$ , se tiene que la posición del secundario respecto a  $O'$  viene dada por  $\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{R}$ , por lo que conocido  $\vec{R}$  la posición respecto al primario, queda totalmente determinado  $\vec{r}$ . El punto  $O'$  debe ser un punto cuya posición respecto a  $O$  tiene que ser conocida.

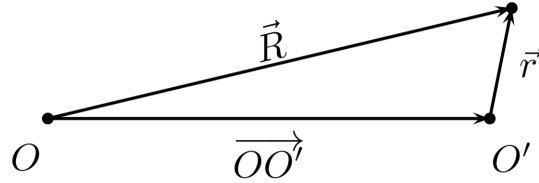


Figura 1.7: Posición del secundario respecto  $O$  y  $O'$

Como punto  $O'$  se suele tomar el centro de la Tierra (en cuyo caso hablamos de coordenadas geocéntricas), la posición del observador en la superficie terrestre (en cuyo caso hablamos de coordenadas topocéntricas), o el baricentro del sistema solar (coordenadas baricéntricas). Si  $O' = O$ , en el sistema solar hablaremos de coordenadas heliocéntricas.

Para poder calcular la posición del secundario respecto al primario, es necesario conocer las siguientes constantes: dos cosenos directores del plano orbital para determinarlo, semieje y excentricidad de la órbita, orientación de la órbita en su plano orbital y una posición en un instante para fijar el secundario en la órbita.

Las constantes que determinan una órbita se suelen llamar elementos orbitales, y se estudiarán en el siguiente apartado.

## Elementos Keplerianos

[illegible]
$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = r \cos V = a(\cos E - e) \\ \eta = r \sin V = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ \zeta = 0 \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = -\frac{na^2}{r} \sin E \\ \dot{\eta} = \frac{na^2\sqrt{1 - e^2}}{r} \cos E \\ \dot{\zeta} = 0 \end{array} \right.$$
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

donde  $R$  es una matriz  $3 \times 3$  que suele representarse como

$$R = \begin{bmatrix} P_X & Q_X & R_X \\ P_Y & Q_Y & R_Y \\ P_Z & Q_Z & R_Z \end{bmatrix}$$

donde los elementos de esa matriz son

$$\begin{aligned} P_X &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ P_Y &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ P_Z &= \sin \omega \sin i \\ Q_X &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \\ Q_Y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i \\ Q_Z &= \cos \omega \sin i \\ R_X &= \sin \Omega \sin i \\ R_Y &= -\cos \Omega \sin i \\ R_Z &= \cos i \end{aligned}$$

Para determinar  $(\xi, \eta, \zeta)$  es necesario conocer la órbita  $(a, e)$  y una posición para una época inicial  $T_0$ . Se suele tomar la anomalía media  $M_0$  para la época inicial.

Los ángulos  $\Omega, \omega, i$  nos posicionan al secundario en el espacio. Los elementos keplerianos son el conjunto de constantes  $(a, e, i, \Omega, \omega, M_0)$ . A los tres primeros elementos se suelen llamar elementos métricos y a los últimos, elementos angulares. Si  $i \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , se dice que la órbita es directa, pero si  $i > \frac{\pi}{2}$  se llama órbita retrógrada.

## Otros conjuntos de elementos

En muchas ocasiones se suele utilizar la variable  $\bar{\omega} = \Omega + \omega$  y se denomina longitud del perihelio y  $\lambda = \Omega + \omega + M$  que es la longitud media. A la variable  $V + \omega$  se le llama argumento de latitud y a  $V + \omega + \Omega$  se le llama longitud verdadera. También se suele utilizar como variable  $\sigma = M - nt$  ( $\sigma = M_0$ ).

Entre los distintos conjuntos de elementos orbitales, destacan los llamados elementos elípticos  $(a, k, h, p, q, \lambda)$  en donde  $a$  es el semieje y  $\lambda$  la longitud media,  $k = e \cos \bar{\omega}$ ,  $h = e \sin \bar{\omega}$ , y si consideramos  $\gamma = \sin \frac{i}{2}$ , tenemos que  $q = \gamma \cos \Omega$  y  $p = \gamma \sin \Omega$ .

Estos elementos están definidos a pesar de que  $i = 0$  o  $e = 0$ , algo que no ocurre en el caso de los elementos Keplerianos. La ecuación de Kepler en estos elementos es, si llamamos longitud



excéntrica a  $\epsilon = E + \omega + \Omega = E + \bar{\omega}$ , de la ecuación (1.26) se tiene que

$$\begin{aligned}
E &= \sin(E) + M \\
E + \bar{\omega} &= \sin(\epsilon - \bar{\omega}) + M + \bar{\omega} \\
\epsilon &= e \sin \epsilon \cos \bar{\omega} - e \cos \epsilon \sin \bar{\omega} + \lambda \\
\epsilon &= k \sin \epsilon - h \cos \epsilon + \lambda
\end{aligned} \tag{1.34}$$

#### 1.11.4. Cálculo de efemérides

Se denomina efeméride de un astro a los valores de sus coordenadas y velocidad en un instante determinado en un sistema de referencias dado.

El cálculo de efemérides tiene por objetivo el determinar la posición y velocidad a partir de los elementos orbitales  $(a, e, i, \Omega, \omega, T_0)$  u otro conjunto equivalente.

El cálculo se efectúa en 4 etapas detalladas a continuación.

##### 1. Sistema orbital $(S; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

A partir del semieje  $a$  se determina el movimiento medio  $n$ , con lo que se tiene, para un instante  $t$ ,  $M = n(t - T_0)$ .

Resolviendo la ecuación de Kepler, se obtiene la anomalía excéntrica  $E$  a partir de la cual se obtiene

$$\begin{cases} \vec{x} = a(\cos E - e) \\ \vec{y} = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ \vec{z} = 0 \end{cases}$$

y sus correspondientes velocidades

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = -a\dot{E} \sin E \\ \dot{\vec{y}} = a\sqrt{1 - e^2} \dot{E} \cos E \\ \dot{\vec{z}} = 0 \end{cases}$$

Si derivamos la ecuación de Kepler (1.26), se tiene que

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E} = \frac{na}{r},$$

e introduciendo este resultado en las velocidades se llega a

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{na^2}{r} \sin E \\ \dot{y} = \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r} \cos E \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

## 2. Sistema espacial con origen en el primario $(S; x, y, z)$

El sistema espacial está relacionado con el orbital mediante los ángulos de Euler:  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$ , y por tanto

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega) \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix}$$

Análogamente, se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{x}} \\ \dot{\vec{y}} \\ \dot{\vec{z}} \end{bmatrix}$$

## 3. Sistema de referencia geocéntrico $(T; x_g, y_g, z_g)$

Sean  $X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$  la posición y velocidad del Sol respecto a un sistema de ejes geocéntrico. Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} x_g = x + X \\ y_g = y + Y \\ z_g = z + Z \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_g = \dot{x} + \dot{X} \\ \dot{y}_g = \dot{y} + \dot{Y} \\ \dot{z}_g = \dot{z} + \dot{Z} \end{array} \right. \right.$$

#### 4. Sistema de referencia topocéntrico ( $O; x_T, y_T, z_T$ )

Sea  $O$  la posición del observador, generalmente en la superficie terrestre, y sean  $X_T, Y_T, Z_T$  la posición topocéntrica del geocentro. Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} x_T = x_g + X_T \\ y_T = y_g + Y_T \\ z_T = z_g + Z_T \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_T = \dot{x}_g + \dot{X}_T \\ \dot{y}_T = \dot{y}_g + \dot{Y}_T \\ \dot{z}_T = \dot{z}_g + \dot{Z}_T \end{array} \right.$$

Finalmente, y de forma general, se dan las efemérides en forma de coordenadas esféricas para poder así relacionarlas mejor con las observaciones que se realizan.

### 1.12. Determinación de los elementos a partir de $\vec{r}$ y $\vec{v}$

Sea  $\vec{r}$  el vector de posición del secundario con respecto al primario en un sistema de coordenadas prefijado y  $\vec{v}$  su velocidad,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{v} &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \end{aligned}$$

Lo que permite determinar inmediatamente

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \\ \dot{V} &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \end{aligned}$$

Con la ayuda de la ley de las áreas (1.9) y teniendo en cuenta que  $dA = \frac{1}{2}r^2dV$ , se tiene que

$$r^2\dot{V} = 2\dot{A} = C = \sqrt{\mu p}$$

La proyección del área sobre los planos coordenados proporciona

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_{xy} = C_3 = & C \cos i \\ C_{yz} = C_1 = & C \sin i \sin \Omega \\ C_{zx} = C_2 = & -C \sin i \cos \Omega \end{array} \right.$$

En el sistema orbital  $(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $\vec{C} = (0, 0, C)$ , pero partiendo de la integral de las áreas (1.9),

$$\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = (y\dot{z} - z\dot{y}, z\dot{x} - x\dot{z}, x\dot{y} - y\dot{x}),$$

por tanto se tiene que

$$\begin{cases} C_1 = y\dot{z} - z\dot{y} = & C \sin i \sin \Omega \\ C_2 = z\dot{x} - x\dot{z} = & -C \sin i \cos \Omega \\ C_3 = x\dot{y} - y\dot{x} = & C \cos i \end{cases}$$

Puesto que  $i \in [0, \pi]$ , el coseno de la última ecuación determina el valor de la inclinación  $i$ , y una vez sabido este valor, se puede calcular  $\Omega$  a partir de las dos primeras ecuaciones.

Para obtener el valor de  $i$ , es necesario conocer  $C$ , y para ello elevamos al cuadrado la integral de las áreas y aplicamos propiedades del producto vectorial y resulta

$$C^2 = (\vec{r} \wedge \vec{v})^2 = r^2 v^2 - (\vec{r} \vec{v})^2,$$

que igualando  $C = \sqrt{\mu p}$  y despejando  $p$  se llega a que

$$p = \frac{1}{\mu} [r^2 v^2 - (\vec{r} \vec{v})^2]$$

Por otro lado, partiendo de la ecuación polar focal de una cónica (1.13) se tiene que

$$e \cos V = \frac{p}{r} - 1, \quad (1.35)$$

que derivando respecto al tiempo,

$$-e \sin V \dot{V} = -\frac{p}{r^2} \dot{r},$$

y puesto que  $r^2 \dot{V} = C = \sqrt{\mu p}$

$$e \sin V = \frac{p}{\sqrt{\mu p}} \dot{r} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \dot{r}. \quad (1.36)$$

Sumando los cuadrados de las ecuaciones (1.35) y (1.36), podemos eliminar el seno y el coseno dejando la expresión

$$e^2 = \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 + \frac{p}{\mu} \dot{r}^2,$$

que permite determinar el valor de la excentricidad.

Una vez determinado el valor de  $e$ , podemos determinar el valor de la anomalía verdadera  $V$  a través de las ecuaciones (1.35) y (1.36). A partir de la relación entre la anomalía verdadera y excentricidad (1.24) se determina el valor de  $E$  y por último con la ecuación de Kepler (1.26), determinamos el valor de la anomalía media  $M$ .

Como los valores de  $p$  y de  $e$  ya son conocidos, se puede calcular el valor del semieje mayor  $a$  con la relación  $p = a(1 - e^2)$ .

Para determinar  $\omega$ , se parte de

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega) \begin{bmatrix} r \cos V \\ r \sin V \\ 0 \end{bmatrix},$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \cos V \\ r \sin V \\ 0 \end{bmatrix},$$

que resolviendo el producto matricial y aplicando propiedades trigonométricas,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(\cos \Omega \cos(\omega + V) - \sin \Omega \sin(\omega + V) \cos i) \\ r(\sin \Omega \cos(\omega + V) + \cos \Omega \sin(\omega + V) \cos i) \\ r \sin(\omega + V) \sin i \end{bmatrix}$$

Por tanto, sabiendo que  $z = r \sin(\omega + V) \sin i$ , se puede determinar el valor de  $\sin(\omega + V)$ , y con la ayuda de la igualdad  $x \cos \Omega + y \sin \Omega = r \cos(\omega + V)$  se determina completamente el valor de  $\omega + V$  y, por tanto, se determina el valor de  $\omega$ .

## 1.13. Teoría de perturbación

### 1.13.1. Introducción

En este trabajo se ha tratado el problema de los dos cuerpos, un caso particular del problema de los  $n$  cuerpos en el que se aborda un problema similar al ya tratado pero con  $n$  puntos de masa. La construcción que vamos a seguir en este caso es similar a la de Levallois [4]. Otros puntos de vista pueden encontrarse en [2], [3], entre otros.

El problema de los  $n$  cuerpos se puede abordar, suponiendo que la masa del primario es dominante frente al resto, como un problema de dos cuerpos pero perturbado, es decir,  $\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ .

El problema de los dos cuerpos ( $\vec{F} = 0$ ) se resuelve en función de 6 constantes, los elementos orbitales.

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, e, i, \omega, \Omega, M_0, t) \\ y &= y(a, e, i, \omega, \Omega, M_0, t) \\ z &= z(a, e, i, \omega, \Omega, M_0, t) \\ \dot{x} &= \dot{x}(a, e, i, \omega, \Omega, M_0, t) \\ \dot{y} &= \dot{y}(a, e, i, \omega, \Omega, M_0, t) \\ \dot{z} &= \dot{z}(a, e, i, \omega, \Omega, M_0, t) \end{aligned} \right\} \text{órbita kepleriana (elementos constantes)}$$

El método en la teoría de perturbación se basa en que el problema perturbado tiene por solución la misma que el problema de los dos cuerpos solo que se sustituyen los elementos por funciones del tiempo  $a(t), e(t), i(t), \omega(t), \Omega(t), M_0(t)$  llamados elementos osculadores. Todas las fórmulas del problema de los dos cuerpos son válidas cambiando los elementos orbitales por estos elementos osculadores.

Si el movimiento se produjera de tal forma que en un instante  $t_1$  desapareciera la fuerza perturbadora, el secundario se movería en torno al primario siguiendo una órbita kepleriana cuyos elementos valdrían  $a(t_1), \dots, M_0(t_1)$ .

Veamos qué ecuaciones satisfacen los elementos osculadores.

Sea  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_6)$  un conjunto de elementos orbitales. Las ecuaciones de movimiento para

el problema de los dos cuerpos resultan

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \dot{x} & \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\mu \frac{x}{r^3} \\
\frac{dy}{dt} &= \dot{y} & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\mu \frac{y}{r^3} \\
\frac{dz}{dt} &= \dot{z} & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\mu \frac{z}{r^3}
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Sustituyendo  $\vec{\sigma}$  por un conjunto de elementos que dependa del tiempo  $\vec{\sigma}(t)$  se satisface la ecuación del movimiento perturbado

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t),$$

y por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial x}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} = \dot{x}, \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial y}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} = \dot{y}, \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial z}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} = \dot{z}, \\
\frac{d\dot{x}}{dt} &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} = -\mu \frac{x}{r^3} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}, \\
\frac{d\dot{y}}{dt} &= \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} = -\mu \frac{y}{r^3} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y}, \\
\frac{d\dot{z}}{dt} &= \frac{\partial \dot{z}}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{z}}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} = -\mu \frac{z}{r^3} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, las parciales respecto a  $t$  son soluciones del problema no perturbado, entonces

se cumplen las ecuaciones (1.37) y por tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^6 \frac{\partial x}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} &= 0, & \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} &= \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}, \\
\sum_{j=1}^6 \frac{\partial y}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} &= 0, & \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} &= \frac{\partial \vec{F}}{\partial y}, \\
\sum_{j=1}^6 \frac{\partial z}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} &= 0, & \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{z}}{\partial \sigma_j} \cdot \frac{d\sigma_j}{dt} &= \frac{\partial \vec{F}}{\partial z},
\end{aligned} \tag{1.38}$$

formando un sistema de seis ecuaciones diferenciales en  $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}$ .

Para relacionar los elementos orbitales con el tiempo, y así obtener las ecuaciones planetarias, se introducen los corchetes de Lagrange.

**Definición 10** Se define corchete de Lagrange de  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$  a la expresión

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \frac{\partial x}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma_j} - \frac{\partial x}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial y}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \sigma_j} - \frac{\partial y}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial z}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \sigma_j} - \frac{\partial z}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \sigma_i}.$$

Si se toman las ecuaciones (1.38) y se manipulan multiplicando las ecuaciones de la izquierda por  $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma_k}, \frac{\partial \dot{y}}{\partial \sigma_k}, \frac{\partial \dot{z}}{\partial \sigma_k}$ , y las de la derecha por  $\frac{\partial x}{\partial \sigma_k}, \frac{\partial y}{\partial \sigma_k}, \frac{\partial z}{\partial \sigma_k}$ , y tenemos en cuenta que  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \sigma_k} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \sigma_k} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \sigma_k} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \sigma_k}$ , sumando se llega a la expresión

$$\sum_{j=1}^6 \left\{ \frac{\partial x}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma_k} - \frac{\partial x}{\partial \sigma_k} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma_j} + \frac{\partial y}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \sigma_k} - \frac{\partial y}{\partial \sigma_k} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \sigma_j} + \frac{\partial z}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \sigma_k} - \frac{\partial z}{\partial \sigma_k} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \sigma_j} \right\} \frac{d\sigma_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_k},$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{j=1}^6 [\sigma_j, \sigma_k] \frac{d\sigma_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_k}.$$

Los elementos osculadores satisfacen pues el sistema de ecuaciones matricial

$$\begin{bmatrix} [\sigma_1, \sigma_1] & [\sigma_2, \sigma_1] & \dots & [\sigma_6, \sigma_1] \\ [\sigma_1, \sigma_2] & [\sigma_2, \sigma_2] & \dots & [\sigma_6, \sigma_2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\sigma_1, \sigma_6] & [\sigma_2, \sigma_6] & \dots & [\sigma_6, \sigma_6] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\sigma_1}{dt} \\ \frac{d\sigma_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\sigma_6}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_6} \end{bmatrix}.$$



Teniendo en cuenta que  $[\sigma_i, \sigma_j] = -[\sigma_j, \sigma_i]$ , y por tanto  $[\sigma_i, \sigma_i] = 0$ , para la determinación de las ecuaciones planetarias habrá que calcular un total de 15 corchetes de Lagrange.

**Teorema 3** *Los corchetes de Lagrange no dependen del tiempo, es decir,  $\frac{\partial}{\partial t} [\sigma_i, \sigma_j] = 0$*

*Demostración.* Denotaremos por  $x_1, x_2, x_3$  las coordenadas  $x, y, z$ . Entonces

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \sigma_j} - \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \sigma_i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(x_k, \dot{x}_k)}{\partial(\sigma_i, \sigma_j)}$$

Derivando respecto al tiempo se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\sigma_i, \sigma_j] &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \sigma_j} - \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \sigma_i} \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{\partial^2 x_k}{\partial \sigma_i \partial t} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \sigma_j} + \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_i} \frac{\partial^2 \dot{x}_k}{\partial \sigma_j \partial t} - \frac{\partial^2 x_k}{\partial \sigma_j \partial t} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \sigma_i} - \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_j} \frac{\partial^2 \dot{x}_k}{\partial \sigma_i \partial t} \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left[ \frac{\partial x_k}{\partial t} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \sigma_j} - \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left[ \frac{\partial x_k}{\partial t} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \sigma_i} - \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial t} \right] \right\} \end{aligned}$$

Sabiendo que  $\frac{\partial x_k}{\partial t} = \dot{x}_k$  y que  $\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial t} = \ddot{x}_k = \frac{\partial F_0}{\partial x_k}$  donde  $F_0 = \frac{\mu}{r}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\sigma_i, \sigma_j] &= \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left[ \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \sigma_j} - \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_j} \frac{\partial F_0}{\partial x_k} \right] - \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left[ \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \sigma_i} - \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_i} \frac{\partial F_0}{\partial x_k} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left[ \frac{\partial \dot{x}_k^2}{\partial \sigma_j} \right] - \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left[ \frac{\partial \dot{x}_k^2}{\partial \sigma_i} \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left[ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_0}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_j} \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left[ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_0}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_i} \right] = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \dot{x}_k^2 \right) - \frac{\partial^2}{\partial \sigma_j \partial \sigma_i} \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \dot{x}_k^2 \right) - \frac{\partial^2 F_0}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial \sigma_j \partial \sigma_i} = 0. \end{aligned}$$

■

Los corchetes de Lagrange al no depender del tiempo más que a través de los elementos orbitales, pueden ser evaluados en el punto de la órbita que nos resulte más conveniente.

Las ecuaciones planetarias se pueden obtener calculando los corchetes de Lagrange de los elementos, pero existe otro procedimiento más general en el que la fuerza perturbadora puede ser, o no, conservativa, que son las ecuaciones de Gauss. En el caso conservativo, se puede obtener las ecuaciones planetarias de Lagrange.

### 1.13.2. Ecuación fundamental de la teoría de perturbación

Sea el problema perturbado expresado por

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3} + F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3} + F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3} + F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{cases}$$

donde la fuerza perturbadora puede depender, además de la posición, de la velocidad y del tiempo. Los parámetros  $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$  están biunívocamente relacionados con los elementos  $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$ , con lo que expresando las ecuaciones anteriores en función de los elementos orbitales se tienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= F_a(a, e, i, \omega, \Omega, M), & \frac{d\omega}{dt} &= F_\omega(a, e, i, \omega, \Omega, M), \\ \frac{de}{dt} &= F_e(a, e, i, \omega, \Omega, M), & \frac{d\Omega}{dt} &= F_\Omega(a, e, i, \omega, \Omega, M), \\ \frac{di}{dt} &= F_i(a, e, i, \omega, \Omega, M), & \frac{dM}{dt} &= F_M(a, e, i, \omega, \Omega, M). \end{aligned}$$

Estas son las expresiones de las derivadas de los elementos osculadores.

Recordemos que el movimiento perturbado debe satisfacer las condiciones

1. Si  $\vec{F} = 0$ , los elementos  $a, e, i, \omega, \Omega$  son constantes y por tanto

$$\frac{dM}{dt} = n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \longrightarrow M = \sigma + nt, \quad \sigma = M(0) = n(0 - t_0)$$

Si denotamos los elementos del problema perturbado por  $(a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_0)$ , entonces se tiene que

$$a = a_0, \quad e = e_0, \quad i = i_0, \quad \omega = \omega_0, \quad \Omega = \Omega_0, \quad M(t) = M_0(t)$$

2. Si  $\vec{F}$  es pequeña, la solución se buscará como

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \delta a, & e &= e_0 + \delta e, & i &= i_0 + \delta i, \\ \omega &= \omega_0 + \delta \omega, & \Omega &= \Omega_0 + \delta \Omega, & M &= M_0 + \delta M. \end{aligned}$$

donde los incrementos  $(\delta a, \delta e, \delta i, \delta \omega, \delta \Omega, \delta M)$  serán cantidades pequeñas y reciben el nombre de perturbaciones.

**3.** Si en un instante  $t$  desapareciese la fuerza de perturbación, el movimiento seguiría en la elipse cuyos elementos fueran igual a los valores que tenían los elementos osculadores en el momento en el que cesa la perturbación y seguiría una órbita kepleriana.

**4.** En el movimiento perturbado, la posición y la velocidad se expresan en función de los elementos con las mismas fórmulas que en el problema de los dos cuerpos sin más que cambiar los elementos por los elementos osculadores.

Sea una integral primera  $f(x, y, x, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \varphi(C_1, \dots, C_j) = cte$  (en donde los elementos  $C_1, \dots, C_j$  son los elementos elípticos) del problema de dos cuerpos.

En el movimiento perturbado, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \sum_{k=1}^j \frac{\partial \varphi}{\partial C_k} \frac{dC_k}{dt} = \\ &= \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_k} \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_k} \left( -\frac{\mu x_k}{r} + F_{x_k} \right) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_k} \frac{\mu x_k}{r} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_k} F_{x_k} \right]. \end{aligned}$$

En el problema de los dos cuerpos,  $\frac{df}{dt} = 0$

$$\sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_k} \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right] = 0 \implies \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_k} \frac{\mu x_k}{r^3} \right] = 0,$$

De donde la ecuación para el movimiento perturbado queda

$$\sum_{k=1}^j \frac{\partial \varphi}{\partial C_k} \frac{dC_k}{dt} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_k} F_{x_k} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\nabla_v f},$$

donde  $\overrightarrow{\nabla_v f}$  denota el gradiente de  $f$  respecto la velocidad.

Se tiene pues la relación fundamental

$$\sum_{k=1}^j \frac{\partial \varphi}{\partial C_k} \frac{dC_k}{dt} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\nabla_v f}. \quad (1.39)$$

Una forma útil de la relación fundamental es considerando el sistema de ejes de la figura (1.9) en donde  $M$  es la posición del secundario,  $\psi$  es la longitud de  $M$  en el plano orbital,  $r$  es el radio vector,  $MX$  es  $M$  siguiendo el radio vector,  $MZ$  es perpendicular al plano orbital por  $M$  en sentido positivo,  $MY$  forma un triedro directo y  $R, S, W$  son las componentes de la fuerza según los ejes  $x, y, z$ .

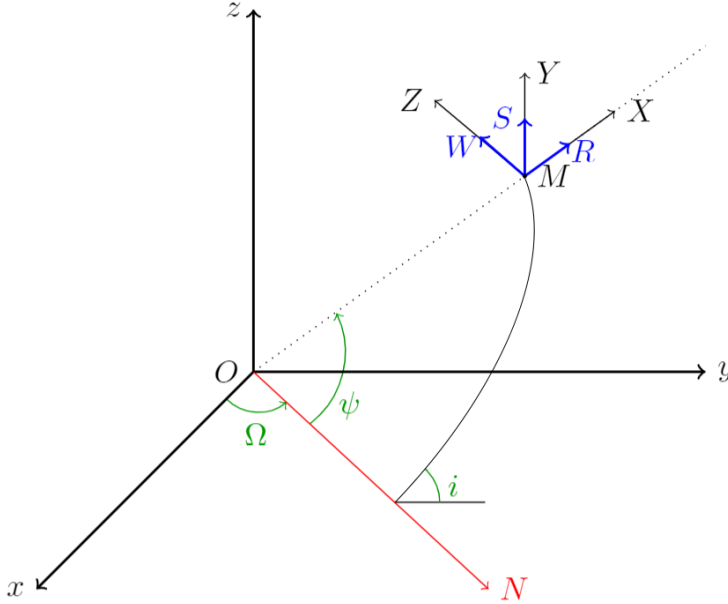


Figura 1.9: Sistemas de coordenadas espacial y orbital

Los componentes según los ejes son

$$\dot{r}, r\dot{\psi}, \dot{Z} \implies \sum_{k=1}^j \frac{\partial \varphi}{\partial C_k} \frac{dC_k}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{r}} R + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \dot{\psi}} S + \frac{\partial f}{\partial \dot{Z}} W$$

### 1.13.3. Ecuaciones planetarias de Gauss

**Teorema 4** *Sea un problema de dos cuerpos perturbado por una fuerza cuyas componentes en el sistema definido en el punto anterior son  $R, S, W$ . Entonces la variación de los elementos keplerianos con respecto al tiempo viene dada por el sistema de ecuaciones*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[ Re \sin V + (1+e \cos V)S \right] \\ \frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[ R \sin V + (\cos E + \cos V)S \right] \\ \frac{di}{dt} = \frac{r \cos(\omega + V)}{na^2\sqrt{1-e^2}} W \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ -R \cos V + \left(1 + \frac{1}{1+e \cos V}\right) S \sin V - \frac{r \cos i \sin(\omega + V)}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} W \right] \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin(\omega + V)}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} W \\ \frac{dM}{dt} = n + \frac{1-e^2}{nae} \left[ R \left( \frac{-2e}{1+e \cos V} + \cos V \right) - \left(1 + \frac{1}{1+e \cos V}\right) S \sin V \right] \end{array} \right. \quad (1.40)$$

*Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones planetarias de Gauss.*

*Demostración.* En este trabajo demostraremos las dos primeras ecuaciones planetarias de Gauss, es decir, demostraremos la igualdad de  $\frac{da}{dt}$  y la de  $\frac{de}{dt}$ .

La integral de la energía se puede expresar en coordenadas polares como

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \dot{\psi}^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}.$$

El primer miembro de esta ecuación es la función  $f(r, \psi, \mathcal{Z})$ , y el del segundo miembro es  $\varphi(a)$ . Aplicando la ecuación fundamental (1.39) de la teoría de perturbación se tiene que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{da}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{r}} R + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \dot{\psi}} S,$$

por tanto,

$$\frac{\mu}{2a^2} \frac{da}{dt} = \dot{r}R + r\dot{\psi}S,$$

donde  $\mu = n^2 a^3$ .

Como  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos V}$ , se tiene que  $\dot{r} = \frac{a(1-e^2)e \sin V}{(1+e \cos V)^2} \frac{dV}{dt}$ , y a partir de la integral de las áreas se tiene que

$$\frac{dV}{dt} = \dot{\psi} = \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}.$$

Por tanto, tenemos la ecuación de Gauss para el semieje

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2a^2}{n^2 a^3} \left[ \frac{r^2 e \sin V}{a(1-e^2)} \cdot \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} R + \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{r} S \right] = \\ &= \frac{2}{n \sqrt{1-e^2}} \left[ Re \sin V + (1+e \cos V)S \right]. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Sea  $C = \sqrt{\mu a(1-e^2)} = r^2 \dot{\psi}$  la integral de las áreas, que se proyecta sobre los ejes de la forma

$$\begin{aligned} C_1 &= y\dot{z} - z\dot{y} = C \sin i \sin \Omega \\ C_2 &= z\dot{x} - x\dot{z} = -C \sin i \cos \Omega \\ C_3 &= x\dot{y} - y\dot{x} = C \cos i. \end{aligned}$$

A partir de la ecuación fundamental (1.39) se obtiene

$$\frac{\partial C}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial C}{\partial e} \frac{de}{dt} = rS.$$

Si se resuelven las parciales de  $C$ , se tiene que  $\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{\sqrt{\mu(1-e^2)}}{2\sqrt{a}}$  y que  $\frac{-e\sqrt{\mu a}}{\sqrt{1-e^2}}$ . Por tanto se tiene que la ecuación planetaria de Gauss para la excentricidad es

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{\mu a}} \left[ rS - \frac{\sqrt{\mu(1-e^2)}}{2\sqrt{a}} \left[ \frac{2}{\mu\sqrt{1-e^2}} \left( R \cdot e \sin V + (1+e \cos V)S \right) \right] \right] = \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu a} \left[ R \sin V + \left[ \left( \frac{1+e \cos V}{e} \right) - \left( \frac{1-e \cos E}{e} \right) \right] S \right] = \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[ R \sin V + (\cos E + \cos V)S \right]. \end{aligned}$$

El resto de demostraciones de estas ecuaciones planetarias se puede encontrar en material de la bibliografía. ■

#### 1.13.4. Ecuaciones planetarias de Lagrange

En el caso de que las fuerzas perturbadoras sean conservativas, es decir,  $\vec{F} = \nabla \mathcal{R}$  donde se denota por  $\mathcal{R}$  el potencial perturbador, las ecuaciones planetarias se pueden escribir de un modo más simple en función del potencial perturbador dando lugar a las llamadas ecuaciones planetarias de Lagrange.

**Teorema 5** *Sea un problema de dos cuerpos perturbado por un potencial  $\mathcal{R}$ . Entonces la variación de los elementos osculadores respecto al tiempo viene dada por*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \\ \frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \\ \frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \end{array} \right. \quad (1.42)$$

*Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones planetarias de Lagrange.*

*Demostración.* El gradiente  $\nabla \mathcal{R}$  se expresa en el sistema de coordenadas  $r, \psi, \mathcal{Z}$  como  $\nabla \mathcal{R} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \psi} \vec{e}_\psi + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{Z}} \vec{e}_\mathcal{Z}$ , donde  $\vec{e}_r, \vec{e}_\psi, \vec{e}_\mathcal{Z}$  son los vectores unitarios asociados al sistema coordenado. Por tanto se tiene que

$$R = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial r}, \quad S = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \psi}, \quad W = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{Z}}.$$

Sea  $\sigma$  un elemento orbital cualquiera, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \sigma} = \\ &= R \frac{\partial r}{\partial \sigma} + r S \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + W \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \sigma}.\end{aligned}$$

Se deben calcular por tanto todas las parciales de  $r, \psi, \mathcal{Z}$  respecto a los seis elementos orbitales.

Sea pues  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos V}$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial a} &= \frac{r}{a}, & \frac{\partial r}{\partial e} &= -a \cos V, & \frac{\partial r}{\partial M} &= \frac{ae \sin V}{\sqrt{1-e^2}}, \\ \frac{\partial r}{\partial i} &= 0, & \frac{\partial r}{\partial \omega} &= 0, & \frac{\partial r}{\partial \Omega} &= 0.\end{aligned}$$

Sea  $\psi = d\omega + dV + d\Omega \cos i$ , entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial a} &= 0, & \frac{\partial \psi}{\partial e} &= 0, & \frac{\partial \psi}{\partial M} &= \sin V \left( \frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right), \\ \frac{\partial \psi}{\partial i} &= \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2}, & \frac{\partial \psi}{\partial \omega} &= 1, & \frac{\partial \psi}{\partial \Omega} &= \cos i.\end{aligned}$$

Respecto a  $\mathcal{Z}$ , se tiene que en el movimiento elíptico,  $\mathcal{Z} = 0$ , y por tanto  $\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial a} = \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial e} = \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial M} = 0$ .

Se define  $\mathcal{Z}$  como la distancia al plano orbital del problema de los dos cuerpos, por tanto la variación inducida en  $\mathcal{Z}$  por  $di, d\Omega$  será  $\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial i} = r \sin(\omega + V)$  y  $\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \Omega} = -r \cos(\omega + V) \sin i$ .

Por tanto, las derivadas del potencial perturbador  $\mathcal{R}$  respecto a los elementos osculadores se expresan como

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} &= \frac{r}{a} R, & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} &= -a \cos V R + r \sin V \left( \frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) S, \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} &= r \sin(\omega + V) W, & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} &= r \cos i S - r \cos(\omega + V) \sin i W, \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} &= r S, & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \left( e \sin V R + (1 + e \cos V) S \right).\end{aligned}$$



A partir de estas relaciones, y de las ecuaciones planetarias de Gauss, se obtienen las ecuaciones de Lagrange.

En este trabajo, se obtiene la ecuación planetaria de Lagrange para el semieje mayor, dejando en la bibliografía documentación para calcular el resto de ecuaciones y demostrar así el teorema en su totalidad.

Para el semieje tenemos que la ecuación de Gauss (1.41) y por tanto

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left( e \sin V R + (1 + e \cos V) S \right) = \\ &= \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}.\end{aligned}$$

El resto de ecuaciones se demuestran de forma similar. ■

### 1.13.5. Ecuaciones planetarias en el caso hiperbólico

En el caso en que la órbita del cuerpo perturbado sea hiperbólica, Navascués [6] obtuvo una expresión similar a (1.40) y (1.42) usando el método de los corchetes de Lagrange, resultando así las ecuaciones planetarias de Lagrange para el caso hiperbólico

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{e^2-1}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{e^2-1}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{e^2-1}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{e^2-1}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{e^2-1}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\cos i}{na^2\sqrt{e^2-1}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \\ \frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{e^2-1}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}, \end{array} \right.$$

y de Gauss para el caso hiperbólico.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2e \sin V}{n\sqrt{e^2 - 1}} R - \frac{2a\sqrt{e^2 - 1}}{nr} S \\ \frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin V}{an} R + \left( \frac{\sqrt{e^2 - 1}^3}{ern} + \frac{r\sqrt{e^2 - 1}}{a^2 en} \right) S \\ \frac{di}{dt} = \frac{r \cos (\omega + V)}{na^2 \sqrt{e^2 - 1}} W \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin (\omega + V)}{na^2 \sqrt{e^2 - 1} \sin i} W \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \cos V}{aen} R - \frac{r(2 + e \cos V) \sin V}{a^2 ne \sqrt{e^2 - 1}} S - \frac{r \sin (\omega + V) \cos i}{a^2 n \sqrt{e^2 - 1} \sin i} W \\ \frac{dM}{dt} = n + \left( \frac{2r}{a^2 n} + \frac{(e^2 - 1) \cos V}{aen} \right) R - \frac{r(2 + e \cos V) \sin V}{a^2 en} S. \end{array} \right.$$

## Capítulo 2

# Conclusiones y Perspectiva

En este Trabajo de Fin de Grado he podido profundizar en los conceptos principales que se encuentran involucrados en el problema de dos cuerpos y el cálculo de efemérides, así como en la teoría de la perturbación. Me satisface el trabajo realizado y haber podido así profundizar acerca de la mecánica celeste y me llevo una inmensa fuente de conocimientos inmensa sobre un tema que siempre me ha llamado la atención.

Como futura línea de trabajo, consideramos que sería interesante encontrar, si ello es posible, un conjunto de variables que describan el movimiento tanto en el caso elíptico como en el caso parabólico e hiperbólico y en las cuales las ecuaciones planetarias sean las mismas.

Es por ello, que con mi intención de realizar el Máster Universitario en Matemática Computacional, tengo intenciones de retomar este trabajo para la realización del TFM y profundizar en la cuestión antes nombrada así como en desarrollos de series de Poisson, para completar así una formación más extensa en mecánica celeste.



# Bibliografía

- [1] A. ABAD, J. DOCOBO, A.ELIPE. 2017. *Astronomía*. Prensas de la Universidad de Zaragoza.
- [2] BROUWER, D., CLEMENCE, G.M. 1965. *Celestial Mechanics*, Ed Academic Press, New York.
- [3] HAGIHARA, Y. 1970. *Celestial Mechanics*. vol **2.**, Ed MIT Press, Cambridge MA.
- [4] LEVALLOIS, J.J., KOVALEVSKY, J. 1971. *Géodésie Générale Vol 4*, Ed Eyrolles, Paris.
- [5] A. LÓPEZ GARCÍA. 2019. *Manual de Astronomía Esférica*. Amazon Fullfilmetnt. Wroclad, Poland.
- [6] E. NAVASCUÉS. 2016 *Ecuaciones para el Movimiento Orbital de Tipo Hiperbólico*. Trabajo fin de grado en matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza.
- [7] J.J. ORÚS, M. A CATALÁ, J NUÑEZ. 2007 *Astronomía Esférica y Mecánica Celeste*. Publicacions y edicions de la Universitat de Barcelona.